

9.2.4 Pravděpodobnosti jevů II

Předpoklady: 9203

Než začneme počítat, důležité připomenutí z minulých hodin: „Množinu všech možných výsledků musíme sestavovat tak, aby všechny výsledky byly rovnocenné“.

Př. 1: Urči pravděpodobnost, že při hození třemi stejnými mincemi padne:
a) dvakrát líc a jednou rub, b) třikrát líc,
c) na všech mincích stejná strana.

Jako množinu všech možných výsledků budeme brát uspořádanou trojici typu $(r, l, l) \Rightarrow$ jako bychom mince odlišovali od sebe (neodpovídá to zcela zadání příkladu, ale takto zavedené výsledky jsou rovnocenné) $\Rightarrow$ počet všech možných výsledků: $2^3 = 8$.

a) padne dvakrát líc a jednou rub

Tři příznivé výsledky $(r, l, l), (l, r, l), (l, l, r) \Rightarrow$ pravděpodobnost $\frac{3}{8}$.

b) padne třikrát líc

Jeden příznivý výsledek $(l, l, l) \Rightarrow$ pravděpodobnost $\frac{1}{8}$.

c) padne na všech mincích stejná strana

Dva příznivé výsledky $(l, l, l), (r, r, r) \Rightarrow$ pravděpodobnosti $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Př. 2: Urči pravděpodobnost, že při deseti hodech mincí:
a) nepadne ani jeden rub, b) padne dvakrát líc a osmkrát rub,
c) padne maximálně třikrát líc.

Množina všech výsledků = všechny uspořádané desetice s dvěma opakujícími se prvky $(r, l) =$ výsledky jednotlivých hodů $\Rightarrow 2^{10}$ možností.

a) nepadne ani jeden rub

Jediný příznivý výsledek samé líce $(l, l, \dots, l) \Rightarrow$ pravděpodobnost $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} \doteq 0,00098$.

b) padne dvakrát líc a osmkrát rub

Příznivé výsledky: uspořádané desetice ze dvou líců a osmi rubů $\Rightarrow \frac{10!}{2! \cdot 8!} = 45$ možností $\Rightarrow$

pravděpodobnost: $\frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{45}{1024} \doteq 0,044$.

c) padne maximálně třikrát líc

Musíme sečíst počty výsledků příznivých jednotlivým počtům líců:

- žádný líc $\Rightarrow 1$ možnost,
- 1 líc (9 rubů) $\Rightarrow \frac{10!}{1! \cdot 9!} = 10$,

- 2 líce (8 rubů) $\Rightarrow \frac{10!}{2! \cdot 8!} = 45$,
- 3 líce (7 rubů) $\Rightarrow \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$,

$\Rightarrow$ celkem 176 možností $\Rightarrow$ pravděpodobnost $\frac{176}{2^{10}} = \frac{176}{1024} = \frac{11}{64} \doteq 0,172$.

Poznámka: Počet příznivých výsledků v bodě b) můžeme zapsat také jako $\binom{10}{2}$ = počet možností, jak z deseti míst vybrat dvě, na která umístíme líce (umístění rubů je tím už dané). Analogicky pak můžeme postupovat u ostatních bodů $\Rightarrow$ řešení bodu c)

$$\frac{1 + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3}}{2^{10}}.$$

Př. 3: Urči pravděpodobnost výsledku, který jsi dosáhl v předminulé hodině, kdy všichni házeli 20 hodů mincí.

Stejný postup jako v předchozím příkladu.

Množina všech výsledků = uspořádané dvacetice ze dvou prvků $\Rightarrow 2^{20} = 1048576$ možností, příznivé výsledky (12 líců 8 rubů) $= \frac{20!}{12! \cdot 8!} = 125970 \Rightarrow$ pravděpodobnost $\frac{125970}{1048576} \doteq 0,120$.

Podobně můžeme určit pravděpodobnosti dalších výsledků našeho házení (uvádíme jenom některé výsledky s počtem líců menším než 11).

$$10 \text{ líců (10 rubů): } \frac{20!}{10! \cdot 10!} \doteq 0,176$$

$$9 \text{ líců (11 rubů): } \frac{20!}{9! \cdot 11!} \doteq 0,160$$

$$8 \text{ líců (12 rubů): } \frac{20!}{8! \cdot 12!} \doteq 0,120$$

$$7 \text{ líců (13 rubů): } \frac{20!}{7! \cdot 13!} \doteq 0,074$$

$$5 \text{ líců (15 rubů): } \frac{20!}{5! \cdot 15!} \doteq 0,0149$$

$$2 \text{ líce (18 rubů): } \frac{20!}{2! \cdot 18!} \doteq 0,00018$$

$\Rightarrow$ Z předchozích výsledků je zřejmé, proč naprostá většina pokusů skončila v rozmezí 7-13 líců ze 20 hodů (z 26 pokusů se do tohoto rozmezí nevešel jediný), pravděpodobnost ostatních výsledků je velmi malá.

Dodatek: S rostoucím počtem hodů navíc pravděpodobnost extrémních výsledků ještě velmi rychle klesá. Například při 100 hodech mincí má nejpravděpodobnější výsledek 50

$$\text{líců, 50 rubů pravděpodobnost } \frac{100!}{50! \cdot 50!} \doteq 0,080, \text{ výsledek 20 líců, 80 rubů}$$

$$\text{pravděpodobnost } \frac{100!}{20! \cdot 80!} \div \frac{100!}{2^{100}} \doteq 0,0000000004, \text{ výsledek 10 líců, 90 rubů}$$

$$\text{pravděpodobnost } \frac{100!}{10! \cdot 90!} \div \frac{100!}{2^{100}} \doteq 1,37 \cdot 10^{-17} \text{ (} 10^{17} \text{ je řádově stáří vesmíru v sekundách),}$$

$$\text{výsledek 0 líců, 100 rubů pravděpodobnost } \frac{1}{2^{100}} \doteq 7,89 \cdot 10^{-31}.$$

Je zřejmé, že na to, že nepadne méně než 15 líců by se dal vsadit i život.

Př. 4: Urči pravděpodobnost, se kterou padne při hodu dvěma kostkami:

a) součet 7, b) součet 8.

Ještě před výpočtem odhadni, který ze součtů je pravděpodobnější.

Odhad: Oba výsledky jsou stejně pravděpodobné, protože obě hodnoty můžeme jako součet získat třemi způsoby:

- $8 = 4 + 4 = 5 + 3 = 6 + 2,$
- $7 = 4 + 3 = 5 + 2 = 6 + 1.$

Jako množinu všech možných výsledků si vybereme množinu všech uspořádaných dvojic (jako bychom kostky rozlišovali) čísel od 1 do 6 $\Rightarrow$ rozlišujeme výsledky (5,6) a (6,5), které jsou tak rovnocenné výsledku (5,5), který může padnout jediným způsobem $\Rightarrow$ všech možných výsledků je $6 \cdot 6 = 36$.

a) součet 7

Příznivé výsledky: (6,1), (1,6), (5,2), (2,5), (4,3), (3,4) $\Rightarrow$ 6 možností $\Rightarrow$

$$\text{pravděpodobnost } \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \doteq 0,167.$$

b) součet 8

Příznivé výsledky: (6,2), (2,6), (5,3), (3,5), (4,4) $\Rightarrow$ 5 možností $\Rightarrow$

$$\text{pravděpodobnost } \frac{5}{36} \doteq 0,139.$$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad bude u některých studentů vyžadovat osobní diskusi. Setkal jsem se s připomínkou, že dvě čtyřky přece také mohou padnout během házení dvakrát. To samozřejmě mohou, když házíme víckrát. Příklad se ale týká jednoho hodu a proto se tato dvojice v množině všech výsledků dvakrát nevyskytuje (stejně jako se tam nevyskytuje dvakrát dvojice (2,1)).

Př. 5: Urči pravděpodobnost, že ve třech hodech po sobě hodíš 6.

Množina možných výsledků: tři hody se šesti možnými výsledky, hody rozlišujeme $\Rightarrow$ uspořádané trojice ze šesti čísel $\Rightarrow 6^3$ možností.

Počet příznivých výsledků: pokaždé padne 6 $\Rightarrow$ jediná možnost $\Rightarrow$ pravděpodobnost

$$\frac{1}{6^3} \doteq 0,0046.$$

Př. 6: Urči pravděpodobnost, že ve čtyřech hodech po sobě hodíš větší číslo než 3.

Množina možných výsledků: čtyři hody se šesti možnými výsledky, hody rozlišujeme $\Rightarrow$ uspořádané čtveřice ze šesti čísel $\Rightarrow 6^4$ možností.

Počet příznivých výsledků: musí padnou jen čísla větší než tři $\Rightarrow$ při každém hodu může padnout 4, 5 nebo 6 (tři možnosti) $\Rightarrow 3^4$ možností $\Rightarrow$ pravděpodobnost $\frac{3^4}{6^4} = \frac{1}{2^4} \doteq 0,0625$.

Př. 7: Urči pravděpodobnost, že během pěti hodů kostkou nehodíš ani jednu šestku.

Množina možných výsledků: uspořádané pětice ze šesti čísel $\Rightarrow 6^5$ možností.

Počet příznivých výsledků: nesmí padnout 6 $\Rightarrow$ pětice sestavujeme jen z pěti čísel $\Rightarrow 5^5$ možností $\Rightarrow$ pravděpodobnost: $\frac{5^5}{6^5} \doteq 0,402$.

Př. 8: Urči pravděpodobnost, že během deseti hodů kostkou hodíš alespoň jednu šestku.

Množina možných výsledků: uspořádané desetice ze šesti čísel $\Rightarrow 6^{10}$ možností.

Počet příznivých výsledků: musí padnout alespoň jednou 6 $\Rightarrow$ obrovské množství různých možností (1 šestka, 2 šestky, ...) $\Rightarrow$ jednodušší bude spočítat opak, kdy nepadne ani jedna šestka a odečíst od všech výsledků.

Nepadne ani jedna šestka $\Rightarrow$ desetice sestavujeme jen z pěti čísel $\Rightarrow 5^{10}$ možností $\Rightarrow$ alespoň jednou šestka $6^{10} - 5^{10}$ možností.

Pravděpodobnost: $\frac{6^{10} - 5^{10}}{6^{10}} = 1 - \frac{5^{10}}{6^{10}} \doteq 0,838$.

Př. 9: Petáková:

strana 170/cvičení 4 a) b) d)

strana 170/cvičení 6 a) c)

strana 170/cvičení 8

strana 170/cvičení 12

Shrnutí: Není možné vyřešit příklady na výpočet pravděpodobnosti bez správného stanovení množiny všech výsledků.